Bizonyítások

1) a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x)=x^3+kx^2+9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl).

Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x=1$ a függvénynek lokális szélsőértékhelye a függvénynek!

Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x=1$ a függvények lokális maximumhelye vagy lokális minimumhelye!

Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőértékhelye is! (11 pont)

b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x)=x^3-9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját! (5 pont)

2) Adott f és g függvény.

$$f:\ D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\quad x\mapsto(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)\cdot\sin 2x$$

a) Igazolja, hogy az így definiált f függvény konstans! (3 pont)

$$g:\quad D_g=[-7;7]\quad x\mapsto x^2-6|x|$$

b) Számítsa ki g függvény zérushelyeit! (3 pont)

c) Adja meg g függvény értékkészletét! (6 pont)

3) Legyen $f(x)=-\dfrac{4x^3}{a}+\dfrac{3x^2}{a}+\dfrac{2x}{a}-a$, ahol a pozitív valós szám és $x\in\mathbb{R}$.

a) Igazolja, hogy $\int\limits_0^a f(x)dx=-a^3+a$! (6 pont)

b) Mely pozitív a számokra teljesül, hogy $\int\limits_0^a f(x)dx\ge 0$? (4 pont)

c) Az x mely pozitív valós értéke lesz a $g(x)=-x^3+x$ függvények lokális (helyi) minimuma? (6 pont)

4) Az $ABCD$ konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:

$DA: 3x-4y-20=0\quad AB: 3x+5y-20=0$

$BC: 4x-3y+12=0\quad CD: 5x+3y+15=0$

a) Igazolja, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá, hogy ennek a négyszögnek nincs derékszöge! (8 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy a négyszög húrnégyszög! (8 pont)

5) Az A pont helyvektora: $\overrightarrow{OA}(\lg a;\lg b)$; a B pont helyvektora: $\overrightarrow{OB}\left(\lg ab;\lg\dfrac{b}{a}\right)$, ahol a és b olyan valós számokat jelölnek, melyekre $0<a<1$, illetve $1<b$ teljesül.

a) Bizonyítsa be, hogy a B pont mindkét koordinátája nagyobb az A pont megfelelő koordinátáinál! (3 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{OA}$ vektorra! (3 pont)

c) Mekkora az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok hajlásszöge? (4 pont)

d) Legyen $a = \frac{1}{10}$, b pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az A, illetve B pontok halmazát! (6 pont)

6) A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést! (7 pont)

Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el! (7 pont)

7) Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire érvényes az alábbi összefüggés:

$$\sin\alpha : \sin\beta = \cos(\alpha+\gamma) : \cos(\beta+\gamma),$$

akkor a háromszög egyenlő szárú és derékszögű! (14 pont)

8) A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben a gyakorlat számára elegendően pontos közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága.

a) Egy csonkakúp alakú fatörzs hossza (vagyis a csonkakúp magassága) 2 m, alsó átmérője 12 cm, felső átmérője 8 cm. A közelítő számítással kapott térfogat hány százalékkal tér el a pontos térfogattól? (Ezt nevezzük a közelítő eljárás relatív hibájának.) (3 pont)

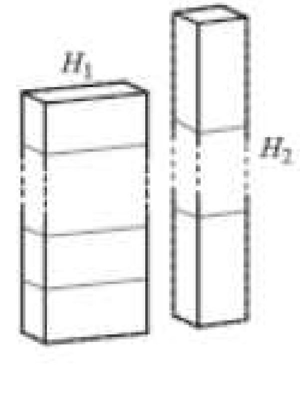
b) Igazolja, hogy a csonkakúp térfogatát – a fentiekben leírt útmutatás alapján kapott - közelítő érték sohasem nagyobb, mint a csonkakúp térfogatának pontos értéke! (7 pont)

Jelölje x a csonkakúp két alapköre sugarának az arányát, és legyen $x > 1$. Bizonyítandó, hogy a fentiekben leírt, közelítő számítás relatív hibájának százalékban mérve a következő függvény adja meg:

$$f:]1;+\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = 25 \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}.$$

c) Igazolja, hogy f-nek nincs szélsőértéke! (6 pont)

9) Két egyenes hasábot építünk, H_1-et és H_2-t. Az építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágók, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alaplapjukkal- az ábra szerint.



a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8$. Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1-et és H_2-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel? (8 pont)

b) Igazolja, hogy $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}\left(n \in \mathbb{N}^+\right)$ sorozat szigorú monoton csökkenő és korlátos! (8 pont)

10) Az 52941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

a) Az 52941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk? (2 pont)

b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel? (6 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyik sem négyzetszám! (4 pont)

11)

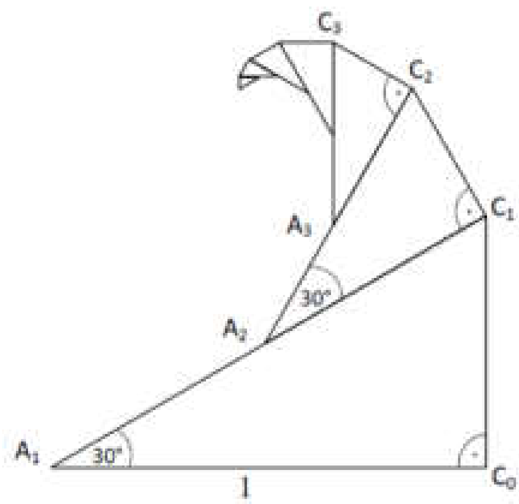
a) Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Számítsa ki a háromszög másik két oldalának hosszát! (5 pont)

b) Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazolja, hogy a háromszögnek nincs 60°-os szöge! (11 pont)

12) Az $A_1C_0C_1$ derékszögű háromszögben az A_1 csúcsnál 30°-os szög van, az A_1C_0 befogó hossza 1, az A_1C_1 átfogó felezőpontja A_2.

Az A_2C_1 szakasz „fölé" az $A_1C_0C_1$ háromszöghöz hasonló $A_2C_1C_2$ derékszögű háromszöget rajzoljunk az ábra szerint. Az A_2C_2 átfogó felezőpontja A_3.

Az A_3C_2 szakasz „fölé" az $A_2C_1C_2$ háromszöghöz hasonló $A_3C_2C_3$ derékszögű háromszöget rajzolunk.



Ez az eljárás tovább folytatható.

a) Számítsa ki az így nyerhető végtelen sok derékszögű háromszög területének összegét (az összeg első tagja az $A_1C_0C_1$ háromszög területe.)! (7 pont)

b) Igazolja, hogy a $C_0C_1C_2...C_n$ töröttvonal hossza minden pozitív n-re kisebb, mint 1,4. (9 pont)

13) Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) és d) jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\frac{2x^2+x-10}{2^{x-1}-2}=0$ (4 pont)

b) $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$ (4 pont)

c) $\lg\left(x^2+x-6\right)=\lg\left(1-x^2\right)$ (4 pont)

d) $\sin x - 1 = \sqrt{\lg\left(\cos^2 x - 1,5\cos x\right)}$ (4 pont)

14) a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! (6 pont)

b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)

c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni? (Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha a, b, c, d pozitív számok, és $a+c=b+d$, akkor az a, b, c, d hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.) (7 pont)

15) a) Egy kocka és egy gömb felszíne egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a gömb térfogata nagyobb, mint a kockáé! (6 pont)

Két fémkocka összeolvasztásával egy nagyobb kockát készítünk. Az egyik beolvasztott kocka egy élének hossza p, a másiké pedig q $(p>0, q>0)$. (Feltesszük, hogy az összeolvasztással kapott kocka térfogata egyenlő a két összeolvasztott kocka térfogatának összegével.)

b) Igazolja, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne $6\cdot\sqrt[3]{\left(p^3+g^3\right)^2}$ (2 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne kisebb, mint a két összeolvasztott kocka felszínének összege! (8 pont)

16) a) A $PQRS$ húrnégyszöget a PR és a QS átlók megrajzolásával négy háromszögre bontottuk. Igazolja, hogy ezek közül a két-két szemközti háromszög hasonló egymáshoz! (4 pont)

Az $ABCD$ húrnégyszög AB oldala a négyszög körülírt körének egyik átmérője. A négyszög BC oldala 3 cm, a CD oldala 5 cm hosszú, továbbá $BCD\sphericalangle=120°$.

b) Számítsa ki a négyszög BD átlójának, AB oldalának és AD oldalának hosszát, valamint a négyszög többi szögét! (10 pont)

17) a) *Ha* $a\mid b$ *igaz, akkor* $a\mid b^2$ *is teljesül* (a és b pozitív egész számok). Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja! ($a\mid b$ azt jelenti, hogy az a egész szám osztója a b egész számnak.) (3 pont)

b) Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyhez létezik olyan p (pozitív) prímszám, amelyre az n^2-pn különbség is egy (pozitív) prímszámmal egyenlő? (7 pont)

Egy lapra 10 pontot rajzoltunk, majd ezeket megszámoztuk 1-től 10-ig. Ezután minden egyes pontot egy-egy vonallal „összekötünk” a lapon szereplő összes olyan ponttal, amelyhez írt szám a kiválasztott ponthoz írt számnak osztója. (Például azt a pontot, amelyhez a 6-ot írtuk, összekötöttük mind a négy ponttal, amelyhez a 6 valamelyik osztóját írtuk.)

c) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf nem egyszerű gráf! (2 pont)
d) Igazolja, hogy a gráf éleinek száma páratlan! (4 pont)

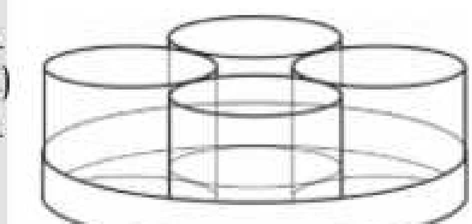
18) A pozitív páratlan számokat „háromszög” alakban rendezzük el a következők szerint: az első oszlopba írjuk az első páratlan számot, a második oszlopba a következő kettőt, a harmadik oszlopba a következő hármat, és így tovább. Például az ötödik oszlop negyedik helyén a 27 áll (lásd az ábrát is).

1	3	7	13	21
	5	9	15	23
		11	17	25
			19	27
				29

a) Hányadik oszlop hányadik helyén áll a 99? (3 pont)
b) Határozza meg a 2017. oszlopban álló első számot! (4 pont)
c) Igazolja, hogy az n-edik oszlopban álló számok összege $n^3\left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$. (9 pont)

19) a) Az $ABCD$ négyzet körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amelyik nem csúcsa a négyzetnek. Bizonyítsa be, hogy $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$. (4 pont)

Egy cég az általa forgalmazott poharakat négyesével csomagolja úgy, hogy a poharakhoz még egy tálcát is ad ajándékba. A 20 cm (belső) átmérőjű, felül nyitott forgáshenger alakú tálcára négy egyforma (szintén forgáshenger alakú) poharakat tesznek úgy, hogy azok szorosan illeszkednek egymáshoz és a tálca oldalfalához is.



b) Igazolja, hogy a poharak alapkörének sugara nagyobb 4,1 cm-nél! (5 pont)

A pohár fala 2,5 mm vastag, belső magassága 11 cm.

c) Igaz-e, hogy a pohárba belefér 5 dl üdítő? (4 pont)

20)

a) Határozza meg a c számjegy lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy $\overline{1c28}$ nem osztható 6-tal, $\overline{93c6}$ nem osztható 36-tal, $\overline{c3c5}$ pedig nem osztható 15-tel! ($\overline{pqrs}$ azt a négyjegyű számot jelöli, melynek első számjegye p, további számjegyei pedig rendre q, r, és s.) (7 pont)
b) Igazolja, hogy nincs olyan n pozitív egész szám, amelyre $4^n + 6n - 1$ osztható 8-cal! (2 pont)
c) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy $4^n + 6n - 1$ minden n pozitív egész szám esetén osztható 9-cel! (7 pont)

21)

a) Határozza meg $\frac{x}{y}$ értékét, ha $\frac{2x+3y}{4x+3y} = \frac{9}{10}$ $(y \neq 0,\ y \neq -2x)$. (3 pont)
b) Legyen $f(x) = x^2 - 11x + 30$.

Igazolja, hogy ha $f(x) \neq 0$, akkor $\frac{f(x+1)}{f(x+1)} = \frac{x-4}{x-6}$. (5 pont)

c) Oldja meg az $\frac{x-4}{x-6} \leq -1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (5 pont)

22) Egy zöldségárus vállalkozó egyik reggel 200 kg első osztályú barackot visz eladásra a piacra. Tapasztalatból tudja, hogy az első osztályú barack eladási egységára és a napi eladott mennyiség között (jó közelítéssel) lineáris kapcsolat van (az eladott mennyiség az eladási egységár lineáris függvénye). Ha egész nap 500 Ft/kg áron kínálná a barackot, akkor várhatóan a fele fogyna el, míg ha 300 Ft/kg áron adná, akkor a 70%-a.

a) Mennyi lenne a zöldségárusnak az első osztályú barack eladásából származó bevétele, ha egész nap 400 Ft/kg-os egységáron kínálná a barackot? (3 pont)

b) Igazolja, hogy ha egész nap x (Ft/kg) az első osztályú barack egységára, y (kg) pedig a napi eladott mennyiség, akkor a közöttük lévő kapcsolat: $y=-\frac{1}{5}x+200\ (0<x<1000)$. (4 pont)

A nap végén a 200 kg-ból megmaradó barackot a zöldségárus másnap már nem adhatja el első osztályúként. Ezért a megmaradó teljes mennyiséget eladja egy gyümölcsfeldolgozó vállalkozásnak, mégpedig 80 Ft/kg egységáron.

c) Mekkora eladási egységáron kínálja a barackot a zöldségárus napközben, hogy a napi bevétele maximális legyen? (A napi bevétel az első osztályúként eladott barackból származó bevétel plusz a gyümölcsfeldolgozó által fizetett összeg.) (7 pont)

23) A római katonák az úgynevezett taxillus-szal játszottak „kockajátékot”. (A taxillus a kecske vagy a juh térdkalácsából faragott csontocska; ld. a képen.)

Dobás után egy taxillus négy különböző oldalára eshetett. Jelölje ezt a négy különböző helyzetet A, B, C és D. Az egyes dobáskimenetelek nem voltak egyformán valószínűek: az A, illetve a B helyzet egyaránt $\frac{4}{10}$, a C, illetve a D helyzet pedig egyaránt $\frac{1}{10}$ valószínűséggel következett be.

A rómaiak általában négy taxillust dobtak fel egyszerre. A Venus-dobás volt az egyik legértékesebb, ekkor a négy csontocska mindegyike más-más oldalára esett. (Rényi Alfréd: Levelek a valószínűségről.)

a) Mennyi a Venus-dobás valószínűsége? (5 pont)

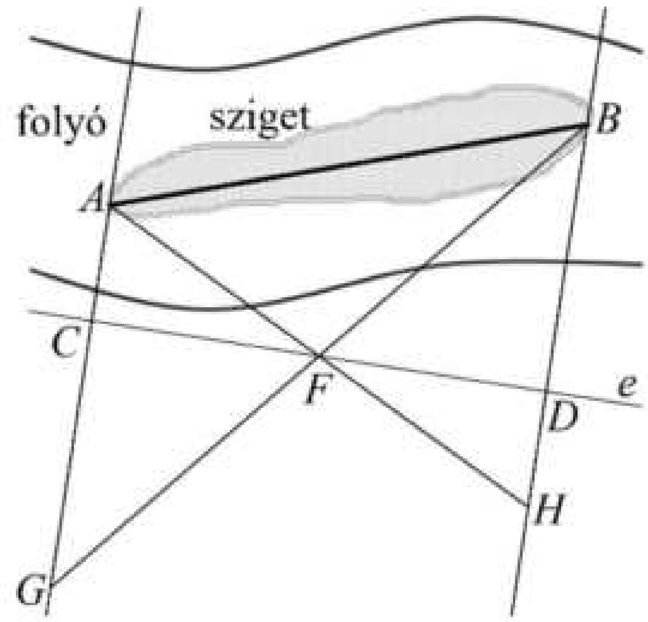
b) Az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége?

I. Négy feldobott taxillus között lesz olyan, amelyik C helyzetben érkezik le.

II. Négy feldobott taxillus között pontosan egy érkezik le az A helyzetben.

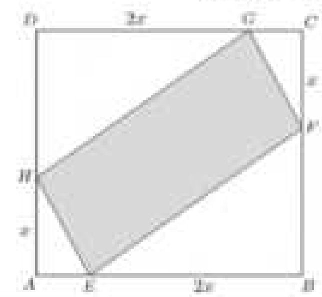
(5 pont)

Thalész, a hét görög bölcs egyike, egy nevezetes, neki tulajdonított mérés során egy folyóban lévő sziget AB hosszát a folyóparton maradva határozta meg.
Először felvett egy e egyenest a parton. Ezen az e egyenesen megkereste azt a C, illetve D pontot, amelyekben a CA, illetve a DB irány merőleges az e egyenesre. Ezután a CD szakasz F felezőpontját is megjelölte egy jelzőkaróval. Ezt követően az AC egyenesen haladva megjelölte azt a G pontot, amelyre B, F és G egy egyenesre illeszkedik; és hasonlóan az AF és BD egyenesek H metszéspontját is megjelölte. Thalész azt állította, hogy a sziget hossza a GH távolsággal egyezik meg.



c) Igazolja Thalész állításának helyességét! (6 pont)

24) Az $ABCD$ négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az ábrán látható módon az EFGH paralelogrammát írjuk. Az AH és CF szakasz hossza x méter, a BE és DG szakasz hossza $2x$ méter $(0 < x < 2)$.



a) Igazolja, hogy a beírt paralelogramma hossza (m^2-ben mérve): $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$. (4 pont)

b) Határozza meg az x értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen! (4 pont)

c) Számítsa ki a beírt paralelogramma szögeit, ha $x = 1{,}25$. (6 pont)

25) A *szókereső* mobiltelefonos játékban a megtalált szó hossza (vagyis a szót alkotó betűk száma) határozza meg a játékosoknak adott pontszámot. Egybetűs szóért nem jár pont, kétbetűs szóért 1 pont jár. Ha $n \geq 3$, akkor az n betűből álló szó megtalálásáért $\dfrac{n^2 - 5n + 10}{2}$ pontot kap a játékos.

a) Van-e olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos? Válaszát indokolja! (3 pont)

b) Igazolja, hogy a játékszabály szerint a hosszabb szóért több pont jár, és hogy csak egész pontszámot kaphat a játékos! (6 pont)

c) Igazolja, hogy ha m tetszőleges természetes szám, akkor a játékos kaphat $2 + \dfrac{m(m+1)}{2}$ pontot! (A leírt játékszabály nem korlátozza a szavak hosszát, ezért feltehetjük, hogy tetszőleges hosszúságú ”szó” létezik.) (7 pont)

26)

a) Hány olyan 1000-nél kisebb p pozitív egész szám van, amelyre a p és a 42 relatív prímek? (6 pont)

Az alábbi táblázatban egy végtelen szorzótábla részletét látjuk.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
...										...

A fehér, illetve szürke színű „L” alakú sávokba lévő számok összege:

$L_1 = 1$

$L_2 = 2 + 4 + 2 = 8$

$L_3 = 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27$

b) Igazolja, hogy $L_n = n^3$ (4 pont)

c) Igazolja, hogy az első n pozitív köbszám összege

$$K_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$ (6 pont)

27) a) Döntse el, hogy igaz-e a következő állítás! Válaszát indokolja! (4 pont)

Ha egy háromszög két magassága egyenlő hosszúságú, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$, $b = \sqrt{27}$ és $\beta = 2\alpha$.

a) Számítsa ki a háromszög szögeit! (5 pont)

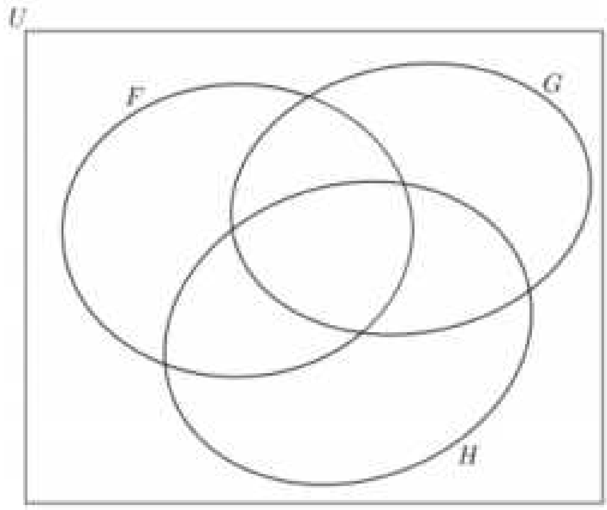
Az egységnyi oldalú, szabályos *ABC* háromszögbe olyan *PQRS* téglalapot írunk, melynek *PQ* oldala az *AB* oldalra illeszkedik, *R* a *BC* oldal pontja, *S* pedig a *CA* oldalé.

b) Határozza meg a *PQRS* téglalap területének maximális értékét! (7 pont)

28) Legyen az *U* alaphalmaz a legalább 4 pontú egyszerű gráfok halmaza. Az *F* halmaz az *U* elemei közül pontosan azokat tartalmazza, amelyek fagráfok, a *G* halmaz pontosan azokat, amelyek összefüggő gráfok, a *H* halmaz pedig pontosan azokat, amelyek 6 pontú gráfok.

a) Az alábbi ábrán satírozással jelölje meg, és halmazműveletekkel is adja meg az *U*-nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz! (2 pont)

b) A megadott Venn-diagram minden egyes további részébe rajzoljon pontosan egy lehetséges gráfot! (5 pont)



Egy telephely K, L, M, N, P, Q épületei közül az éjszakai ellenőrzés során ötöt ellenőriz a biztonsági őr.

c) Hányféleképpen tervezheti meg az útvonalát, ha K és L épületeket mindenképp ellenőrzi? (Két útvonal különböző, ha a két út során más épületeket, vagy ugyanazokat az épületeket, de más sorrendben ellenőriz a biztonsági őr.) (4 pont)

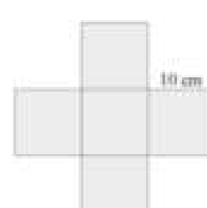
Megrajzoltuk a $ABCDE$ konvex ötszög oldalait és átlóit, majd a megrajzolt szakaszok mindegyikét vagy kékre, vagy zöldre színeztük. A színezés befejezése után észrevettük, hogy nincs olyan háromszög, amelynek csúcsai az A, B, C, D, E pontok közül valók, és mindhárom oldala azonos színű.

d) Igazolja (például indirekt módszerrel), hogy nincs olyan csúcsa az ötszögnek, amelyből legalább három azonos színű szakasz indul ki! (5 pont)

29) a) Igazolja, hogy nincs olyan 2-nél nagyobb n egész szám, melyre $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, és $\binom{n}{3}$ (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai! (7 pont)

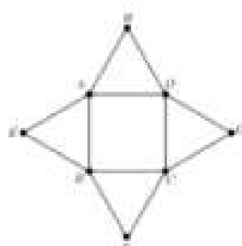
b) Határozza meg azokat az 5-nél nagyobb n egész számokat, melyekre $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$, és $\binom{n}{6}$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő tagjai! (9 pont)

30) A mellékelt ábrán egy kereszt alakú lemez látható, amely 5 db 10 cm oldalú négyzetből áll. A lemezből egy 10 cm alapélű, szabályos négyoldalú gúla hálóját szeretnénk kivágni úgy, hogy a középső négyzet legyen a gúla alaplapja.



a) Igazolja, hogy a lehetséges hálók kivágása során keletkező hulladék legalább $200\ \text{cm}^2$, de kevesebb $300\ \text{cm}^2$-nél! (6 pont)

Tekintsük az ábrán látható nyolcpontú gráfot.



b) A gráfban véletlenszerűen kiválasztunk két csúcsot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két csúcsot él köti össze a gráfban?

c) A gráf 9 élét kékre, 3 élét pedig zöldre színezzük. Igazolja, hogy bármelyik ilyen színezéssel lesz a gráfban egyszínű (gráfelméleti) kör! (3 pont)

31) Adott az $x^2-(4p+1)x+2p=0$ másodfokú egyenlet, ahol p valós paraméter.

a) Igazolja, hogy bármely valós p érték esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van! (3 pont)

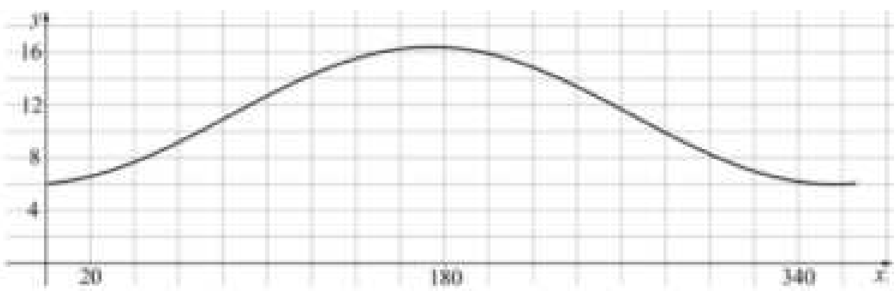
b) Ha az egyenlet egyik gyöke 3, akkor mennyi a másik gyöke? (4 pont)

c) Határozza meg a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 7 legyen! (6 pont)

32) Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napfelkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő f függvénnyel lehet modellezni:

$$f(n)=-5{,}2\cos\left(\frac{n+8}{58}\right)+11{,}2,$$

ahol n az adott nap sorszámát jelöli egy adott éven belül, $f(n)$ pedig a nappal hossza órában számolva $(1\le n\le 365,\ n\in\mathbb{N})$.



Az alábbi ábra a $g:[1;365]\to\mathbb{R};\ g(x)=-5{,}2\cos\left(\frac{x+8}{58}\right)+11{,}2$ függvényt szemlélteti.(A g függvény az f-nek egy folytonos kiterjesztése.)

a) Ha $x=1$, akkor $\frac{x+8}{58}$ helyettesítési értéke $\frac{9}{58}$.

Adja meg a $\frac{9}{58}$ radián értékét fokban mérve! (2 pont)

b) Számítsa ki a modell alapján, hogy az év 50. napján milyen hosszú a nappal!
Válaszát óra:perc formátumban, egészre kerekítve adja meg! (3 pont)

c) Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb! (7 pont)

Adott egy másik, az $y=-5{,}2\cos(x)+11{,}2$ egyenletű görbe, valamint az $x=0$, az $y=0$ és $x=2\pi$ egyenletű egyenesek.

d) Számítsa ki a görbe és a három egyenes által határolt korlátos síkidom területét! (4 pont)

33) Egyes kutatók szerint a városokban az influenzával fertőzött betegek száma a $B(t)=\dfrac{L}{1+\left(\frac{L}{B_0}-1\right)\cdot 0{,}75^t}$ formula szerint alakul. A képletben t az influenzajárvány kezdetétől eltelt idő napokban kifejezve $(0\le t\le 30)$, L a város lakosainak száma, B_0 pedig a járvány kezdetekor a fertőzött betegek száma a városban $(0<B_0<L)$.

Egy nagyvárosban $L=1{,}5$ millió, $B_0=1000$.

a) A modell szerint hány fertőzött betegre lehet számítani ebben a városban a járvány kezdete után 5 nappal? (3 pont)

b) Hány nap múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött beteg a modell szerint? (6 pont)

c) Igazolja, hogy ha L és K adott pozitív számok, $n \in \mathbb{N}^+$, akkor a $b_n = \dfrac{L}{1 + K \cdot 0{,}75^n}$ képlettel megadott sorozat korlátos, szigorúan monoton növekedő, és $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. (7 pont)

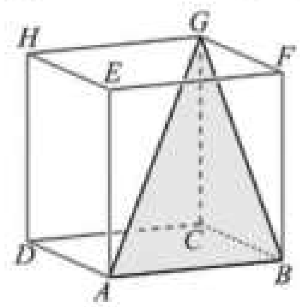
34) Egy áruházláncban minden *Kocka* csokoládé vásárlásakor a csoki mellé ajándékba adnak egy „zsákbamacska" csomagot, amelyben egy kis fémkocka van. A fémkocka mindegyik lapja sárga vagy kék színűre van festve úgy, hogy mind a két színű lap előfordul.

a) Igazolja, hogy (színezés szerint) összesen 8-féle kocka van, ha a forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek! (6 pont)

b) Dórinak 7 különböző színezésű kockája van, így már csak egy hiányzik a teljes készlethez, hogy abból nyakláncot készítsen magának. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 3 darab *Kocka* csokoládét vesz, akkor meglesz a teljes készlete? (Feltételezhetjük, hogy mindegyik kockafajta ugyanakkora valószínűséggel fordul elő a csomagokban.) (4 pont)

Az ábrán látható $ABCDEFGH$ kocka élhosszúsága 10 egység.

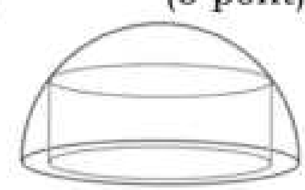
c) Számítsa ki az ABG háromszög beírt körének sugarát! (6 pont)



35) Két forgáshenger alakú viaszgyertyánk van. Az egyik gyertya alapkörének sugara r, magassága h, a másik alapkörének sugara R, magassága szintén h. A két gyertyát összeolvasztjuk, majd a viaszból egy ugyancsak h magasságú, forgáshenger alakú gyertyát öntünk $(r, h, R > 0)$.

a) Igazolja, hogy az így kapott gyertya alapkörének sugara legalább $\sqrt{2rR}$. (Az öntés során fellépő anyagveszteségtől eltekinthetünk.) (5 pont)

Egy forgáshenger alakú tortát egy 15 cm sugarú, félgömb alakú védőbúra alatt helyezünk el. A torta a félgömb határoló körének síkján áll, és a torta fedőlapjának határoló köre a félgömbre illeszkedik (az ábra szerint).



b) Igazolja, hogy az m cm magasságú torta térfogata (köbcentiméterben mérve) $225\pi m - \pi m^3$. $(0 < m < 15)$ (4 pont)

c) Igazolja, hogy a védőbúra alatt (a fent leírt módon) elhelyezhető maximális térfogatú torta térfogata kisebb, mint a félgömb térfogatának 60%-a! (7 pont)